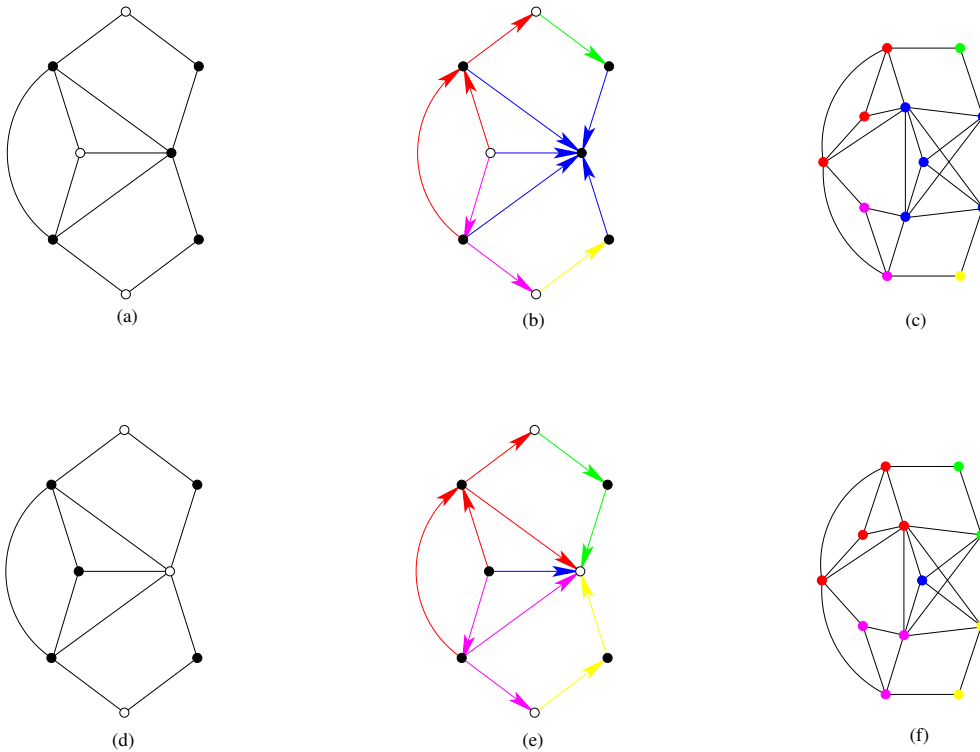


Étudiant :XXXXXX
 XXX@XXX

Encadrant : D. Cornaz,
 Co-encadrant : F. Furini
 {cornaz,furini}@lamsade.dauphine.fr

Sujet de la thèse

Contexte. La coloration est un problème d’optimisation combinatoire, fondamental dans l’interaction entre la programmation mathématique et la théorie des graphes, puisque le théorème des graphes parfaits caractérise de fait les systèmes entiers, et duaux-entiers, de la forme $\{Ax \leq \mathbf{1}, x \geq \mathbf{0}\}$ où A est une matrice 0-1, voir Schrijver [10]. Au niveau algorithmique, seule la fonction théta Lovász (programmation semi-définie : SDP) permet d’optimiser en temps polynomial (des fonctions linéaires) sur ces systèmes. Les enjeux de l’efficacité de la résolution, au niveau des applications *real-life* sont majeurs [8]. Dans [4] une approche *purement théorie des graphes* a montrée sa pertinence théorique et pratique en terme d’amélioration de bornes SDP et LP, et le côté pratique a été creusé dans [3].



Projet. L’approche de [4] est basée sur les *sandwich line-graph* introduit dans [5] puis étudié pour des propriétés algorithmiques [2] ou géométriques [9]. Elle consiste à établir une **bijection** entre l’ensemble de toutes les colorations d’un graphe simple G (en fait de son complémentaire \bar{G}) et l’ensemble de tous les stables d’un sous-graphe partiel $S(\vec{G})$ de son line-graph où les arêtes sont supprimées en fonction d’une orientation acyclique arbitraire \vec{G} de G . Dans la figure ci-dessus G est en (a),(d), \vec{G} en (b),(e) et $S(\vec{G})$ en (c),(f). Au stable (sommets blancs) de (a) est associé une coloration (en fait partition en cliques) en (c), inversement, à la (co-) coloration en (f) est associé un stable en (d).

Dans un premier temps on étudiera les transformations des graphes complets, ces structures, complètes mais sophistiquées, recèlent des surprises au niveau complexité algorithmique puisque certains problèmes classiques y sont faciles d'autre non, on tentera aussi de transformer nos résultats *graphiques et algorithmiques* en résultats polyédraux, en suivant l'approche de [6, 7]. Par la suite on évoluera, soit vers des méthodes plus sophistiquées de la programmation mathématique [1], soit dans une ligne théorie des graphes/algorithmique en fonction des succès et défaites rencontrées.

Références

- [1] Martin Bergner, Alberto Caprara, Alberto Ceselli, Fabio Furini, Marco E. Lübbecke, Enrico Malaguti, Emiliano Traversi : Automatic Dantzig-Wolfe reformulation of mixed integer programs. *Mathematical Programming, Series A*, 149(1-2) : 391-424 (2015)
- [2] Flavia Bonomo, Monia Giandomenico, Fabrizio Rossi : A note on the Cornaz-Jost transformation to solve the graph coloring problem. *Inf. Process. Lett.* 113(18) : 649-652 (2013)
- [3] Denis Cornaz, Fabio Furini, Enrico Malaguti : Solving vertex coloring problems as maximum weight stable set problems. *Discrete Applied Mathematics* 217 : 151-162 (2017)
- [4] Denis Cornaz, Philippe Meurdesoif : Chromatic Gallai identities operating on Lovász number. *Mathematical Programming, Series A*, 141(1-2) : 347-368 (2014)
- [5] Denis Cornaz, Vincent Jost : A one-to-one correspondence between colorings and stable sets. *Oper. Res. Lett.* 36(6) : 673-676 (2008)
- [6] Denis Cornaz, Ali Ridha Mahjoub : The Maximum Induced Bipartite Subgraph Problem with Edge Weights. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 21(3) : 662-675 (2007)
- [7] Denis Cornaz : A linear programming formulation for the maximum complete multipartite subgraph problem. *Mathematical Programming, Series B*, 105(2-3) : 329-344 (2006)
- [8] Michele Conforti, Gérard Cornuéjols, Ajai Kapoor, Kristina Vuskovic : Perfect, ideal and balanced matrices. *European Journal of Operational Research* 133(3) : 455-461 (2001)
- [9] Gintaras Palubeckis : Facet-inducing web and antiweb inequalities for the graph coloring polytope. *Discrete Applied Mathematics* 158(18) : 2075-2080 (2010)
- [10] A. Schrijver, "Combinatorial optimization : Polyhedral and efficiency", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2003.